102 學年度學測試題

1.學校規定上學期成績需同時滿足以下兩項要求，才有資格參選模範生。

一、國文成績或英文成績 70 分（含）以上；

二、數學成績及格。

已知小文上學期國文 65 分而且他不符合參選模範生資格。請問下列哪一個選項的推論是正確的？

(1)小文的英文成績未達 70 分

(2)小文的數學成績對及格

(3)小文的英文成績 70 分以上但數學成績不及格

(4)小文的英文成績未達 70 分且數學成績不及格

(5)小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格　【102.學測　◆◇◇排列組合】

【解】：**(5)**

不符合參選模範生資格，則只要其中一個條件不成立即可。

故可推論得知小文的英文成績未達 70 分或數學成績不及格。

2.令 $a=2.6^{10}-2.6^{9}$，$b=2.6^{11}-2.6^{10}$，$c=\dfrac{2.6^{11}-2.6^{9}}{2}$。請選出正確的大小關係。

(1) $a>b>c$　(2) $a>c>b$　(3) $b>a>c$　(4) $b>c>a$　(5) $c>b>a$

【102.學測　◆◇◇指數與對數函數】

【解】：**(4)**

令 $y=f(x)=2.6^{x}$，$A(9,2.6^{9})$、$B(10,2.6^{10})$、$C(11,2.6^{11})$，則：

$f(x)$ 為一遞增函數（凹口向上）

$a=\dfrac{2.6^{10}-2.6^{9}}{10-9}=m_{\overline{AB}}$、$b=\dfrac{2.6^{11}-2.6^{10}}{11-10}=m_{\overline{BC}}$、$c=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{m_{\overline{AB}}+m_{\overline{BC}}}{2}$

故由指數函數的圖形觀察可得知 $b>c>a$

【另解】：$\because a=2.6^{9}(2.6-1)=2.6^{9}\times1.6$，$b=2.6^{9}\left(2.6^{2}-2.6\right)=2.6^{9}\times4.16$，

$c=2.6^{9}\left(\dfrac{2.6^{2}-1}{2}\right)=2.6^{9}\times2.88$，$\therefore b>c>a$。故選**(4)**。

3.袋子裡有 3 顆白球，2 顆黑球。由甲、乙、丙三人依序各抽取 1 顆球，抽取後不放回。若每顆球被取出的機會相等，請問在甲和乙抽到相同顏色的條件下，丙抽到白球之條件機率為何？【102.學測　◆◇◇機率】

(1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{5}{12}$　(3) $\frac{1}{2}$　(4) $\frac{3}{5}$　(5) $\frac{2}{3}$

【解】：**(3)**

甲和乙抽到相同顏色的情形為同抽到白球或同抽到黑球

則機率為 $\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

在甲和乙抽到相同顏色的情形下丙抽到白球的機率為

$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{3}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

故在甲和乙抽到相同顏色的條件下，丙抽到白球之機率為 $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{2}$

4.已知以下各選項資料的迴歸直線（最適合直線）皆相同且皆為負相關，請選出相關係數最小的選項。【102.學測　◆◇◇數據分析】

(1)

x	2	3	5
y	1	13	1

(2)

x	2	3	5
y	3	10	2

(3)

x	2	3	5
y	5	7	3

(4)

x	2	3	5
y	9	1	5

(5)

x	2	3	5
y	7	4	4

【解】：**(5)**

$r_{x,y}$ 為相關係數、σ_x 為 x 的標準差、σ_y 為 y 的標準差、b 為迴歸直線的斜率

則 $b=r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow r=b\cdot\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$\because$ 各選項的斜率 b 及 σ_x 均相同，$\therefore r$ 正比於 $\frac{-1}{\sigma_y}$

故可知得知當 σ_y 愈小時，則 r 值愈小，故選 **(5)**

5.將 24 顆雞蛋分裝到紅、黃、綠的三個籃子。每個籃子都要有雞蛋，且黃、綠兩個籃子都裝奇數顆。請選出分裝的方法數。【102.學測　◆◇◇排列組合】

(1)55　(2)66　(3)132　(4)198　(5)253

【解】：(2)

此題為重複組合的題型

令紅球 x 顆，黃球 y 顆，綠球 z 顆，且 $x\geq 1$、y,z 為正奇數

則 $(x'+1)+(2y'+1)+(2z'+1)=24 \Rightarrow x'+2y'+2z'=21$，其中 x',y',z' 為非負整數

又上式中的 x' 必須為正奇數解

$\therefore (2x''+1)+2y'+2z'=21 \Rightarrow x''+y'+z'=10$，其中 x'',y',z' 為非負整數

故所求為 $H_{10}^{3}=C_{2}^{12}=66$ 組

6.莎韻觀測遠方等速率垂直上升的熱氣球。在上午 10:00 熱氣球的仰角為30°，到上午 10:10 仰角變成34°。請利用下表判斷到上午 10:30 時，熱氣球的仰角最接近下列哪一個度數？【102.學測　◆◇◇三角函數】

θ	30°	34°	39°	40°	41°	42°	43°
$\sin\theta$	0.500	0.559	0.629	0.643	0.656	0.669	0.682
$\cos\theta$	0.866	0.829	0.777	0.766	0.755	0.743	0.731
$\tan\theta$	0.577	0.675	0.810	0.839	0.869	0.900	0.933

(1)39°　(2)40°　(3)41°　(4)42°　(5)43°

【解】：(3)

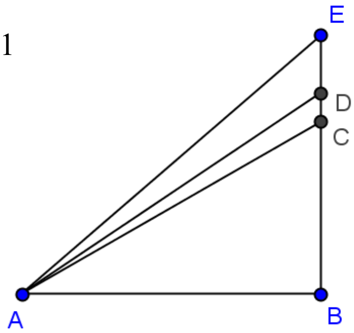
如右圖所示：C 為 10:00 時熱氣球的位置，D 為 10:10 時熱氣球的位置，E 為 10:30 時熱氣球的位置，A 是莎韻的位置，B 是熱氣球投影在地面的位置。

令 $\overline{CD}=x$，又 $\angle CAB=30^\circ$，故可假設 $\overline{AB}=\sqrt{3}$、$\overline{BC}=1$

$\because \tan 34^\circ=\dfrac{1+x}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\sqrt{3}\tan 34^\circ-1 \doteq 0.1691$

令熱氣球 10:30 時的仰角為 $\angle EAB=\theta$

則 $\tan\theta=\dfrac{1+3x}{\sqrt{3}} \doteq 0.870 \Rightarrow \theta \doteq 41^\circ$



7.設 n 為正整數，符號 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}^n$ 代表矩陣 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$ 自乘 n 次。令 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_n & b_n\\c_n & d_n\end{bmatrix}$，請選出正確的選項。【102.學測　◆◇◇矩陣】

(1) $a_2=1$　(2) a_1,a_2,a_3 為等比數列　(3) d_1,d_2,d_3 為等比數列

(4) b_1,b_2,b_3 為等差數列　(5) c_1,c_2,c_3 為等差數列

【解】：**(1)(2)(3)(5)**

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 4\end{bmatrix}，\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}1 & 3\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7\\0 & 8\end{bmatrix}$$

$a_1=a_2=a_3=1$；$b_1=1$、$b_2=3$、$b_3=7$；$c_1=c_2=c_3=0$；$d_1=2$、$d_2=4$、$d_3=8$

由上述的結論可推知答案選**(1)(2)(3)(5)**

8.設 $a>1>b>0$，關於下列不等式，請選出正確的選項。

(1) $(-a)^7>(-a)^9$　(2) $b^{-9}>b^{-7}$　(3) $\log_{10}\frac{1}{a}>\log_{10}\frac{1}{b}$

(4) $\log_a 1>\log_b 1$　(5) $\log_a b\ge\log_b a$

【102.學測　◆◇◇指數與對數函數】

【解】：**(1)(2)**

本題利用指數函數與對數函數圖形（共有 4 類）的增減性來判讀選項的正確性。

(1)○，底數 $a>1\Rightarrow a^7<a^9\Rightarrow -a^7>-a^9\Rightarrow(-a)^7>(-a)^9$

(2)○，底數 $0<b<1\Rightarrow b^{-9}>b^{-7}$

(3)╳，$a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}\Rightarrow\log_{10}\frac{1}{a}<\log_{10}\frac{1}{b}$

(4)╳，$\log_a 1=\log_b 1=0$

(5)╳，例如：當 $a=2$，$b=\frac{1}{4}$ 時，滿足 $a>1>b>0$，

但 $\log_a b=\log_2\frac{1}{4}=-2$ 小於 $\log_b a=\log_{\frac{1}{4}}2=-\frac{1}{2}$。

9.設 $a<b<c$。已知實係數多項式函數 $y=f(x)$ 的圖形為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於 $(a,0)$、$(b,0)$ 兩點；實係數多項式函數 $y=g(x)$ 的圖形亦為一開口向上的拋物線，且跟 x 軸交於 $(b,0)$、$(c,0)$ 兩點。請選出 $y=f(x)+g(x)$ 的圖形可能選項。

(1)水平直線　　　　(2)和 x 軸僅交於一點的直線

(3)和 x 軸無交點的拋物線　　　　(4)和 x 軸僅交於一點的拋物線

(5)和 x 軸交於兩點的拋物線

【102.學測　◆◇◇多項式函數】

【解】：**(4)(5)**

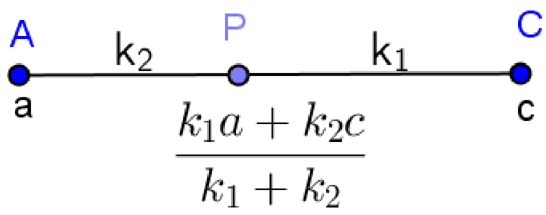
$f(x)=k_1(x-a)(x-b)$，其中 $k_1>0$

$g(x)=k_2(x-b)(x-c)$，其中 $k_2>0$

$y=f(x)+g(x)=(x-b)[(k_1+k_2)x-(k_1a+k_2c)]$，其中 $k_1+k_2>0$

交於 $(b,0)$、$(\dfrac{k_1a+k_2c}{k_1+k_2},0)$

由分點公式可得知 $a<\dfrac{k_1a+k_2c}{k_1+k_2}<c$



(1)當 $\dfrac{k_1a+k_2c}{k_1+k_2}=b$，在此條件 $y=f(x)+g(x)$ 為和 x 軸僅交於一點的拋物線。

(2)若 $\dfrac{k_1a+k_2c}{k_1+k_2}\neq b$，則 $y=f(x)+g(x)$ 為和 x 軸交於兩點的拋物線。

10.坐標平面上考慮兩點 $Q_1(1,0)$，$Q_2(-1,0)$。在下列各方程式的圖形中，請選出其上至少有一點 P 滿足內積 $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0$ 的選項。【102.學測　◆◇◇平面向量、二次曲線】

(1) $y=\dfrac{1}{2}$　　(2) $y=x^2+1$　　(3) $-x^2+2y^2=1$

(4) $4x^2+y^2=1$　　(5) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$

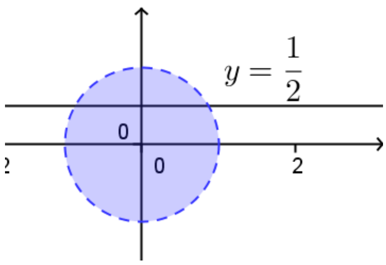
【解】：**(1)(3)(4)**

設 $P(x,y)$，代入 $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0$，得

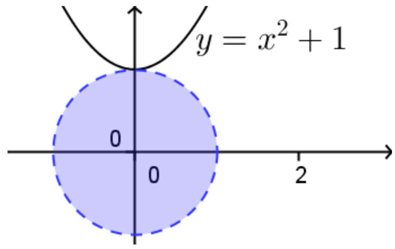
$(1-x,-y)\cdot(-1-x,-y)<0\Rightarrow(1-x)(-1-x)+y^2<0\Rightarrow x^2+y^2<1$

即 P 是圓心 $(0,0)$，半徑 1 的圓之內部的點（不包括圓周上的點）。

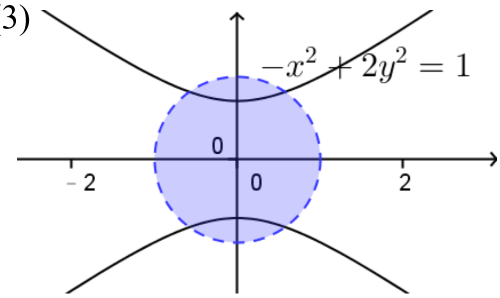
(1)



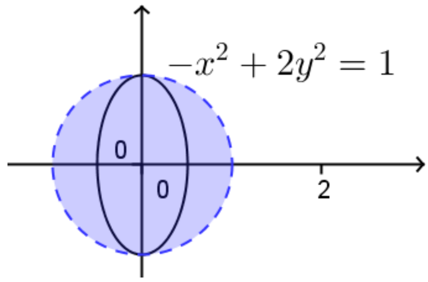
(2)



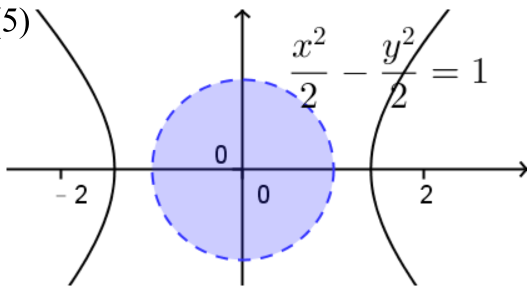
(3)



(4)



(5)



選項**(1)(3)(4)**有交點，故選**(1)(3)(4)**。

11.設 F_1,F_2 為橢圓Γ的兩個焦點。S 為以 F_1 為中心的正方形（S 的各邊可不與Γ的對稱軸平行）。試問 S 可能有幾個頂點落在Γ上？【102.學測　◆◇◇二次曲線】

(1)1　　(2)2　　(3)3　　(4)4　　(5)0

【解】：**(1)(2)(5)**

∵正方形的四個頂點到中心等距離，∴S 的頂點必落在以 F_1 為圓心的圓 C 上。又因為在所有橢圓上的點中，以頂點 A 距離 F_1 最近（近日點），所以圓 C 最多與橢圓Γ交 2 點，即 S 最多有 2 個頂點落在Γ上。

底下三個圖中的 S 分別有 0、1、2 個頂點在橢圓Γ上：

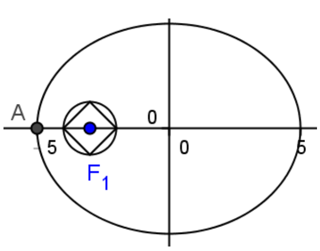


圖 1

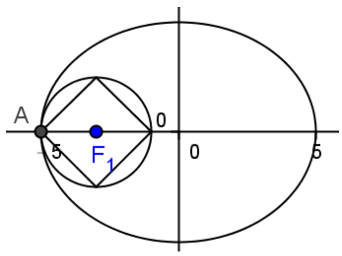


圖 2

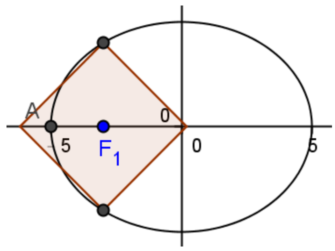


圖 3

三個圖中，圓 C 的半徑在圖 1 小於 $\overline{AF_1}$，在圖 2 等於 $\overline{AF_1}$，在圖 3 等於正焦弦長之半。

故選**(1)(2)(5)**。

12.設實數組成的數列$\lt a_n \gt$為公比為-0.8的等比數列，實數組成的數列$\lt b_n \gt$是首項為 10 的等差數列。已知$a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$。請選出正確的選項。

(1)$a_9\times a_{10}<0$　(2)$b_{10}>0$　(3)$b_9>b_{10}$　(4)$a_9>a_{10}$　(5)$a_8>b_8$

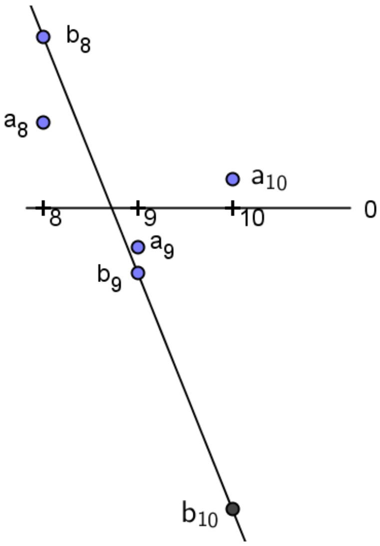
【102.學測　◆◇◇數列與級數】

【解】：**(1)(3)**

$\because$等比數列$\langle a_n\rangle$的公比為-0.8，$\therefore\langle a_n\rangle$是正負相間，且愈來愈接近$0$。

$\because\langle b_n\rangle$是首項為$10$的等差數列，$\therefore\langle b_n\rangle$是從$10$開始遞增或遞減的數列。

又知$a_9>b_9$且$a_{10}>b_{10}$，所以b_9與b_{10}有一個比負數還小，因此，$\langle b_n\rangle$為遞減數列，且公差為負。



(1)$\because\langle a_n\rangle$正負相間，$\therefore a_9\times a_{10}<0$。

(2)(3)$\because\langle b_n\rangle$為遞減數列，$\therefore b_{10}<b_9$。又$a_9$與$a_{10}$為一正一負，且$a_9>b_9$、$a_{10}>b_{10}$，所以$b_{10}<0$。

(4)(5) 右圖的數列$\langle a_n\rangle$與$\langle b_n\rangle$滿足題意。

但$a_9<a_{10}$，$a_8<b_8$。

故選**(1)(3)**。

13.設k為一整數。已知$\frac{k}{3}<\sqrt{31}<\frac{k+1}{3}$，則$k=$______。

【102.學測　◆◇◇數與式】

【解】：

$$\frac{k}{3}<\sqrt{31}<\frac{k+1}{3}\Rightarrow\frac{k^2}{9}<31<\frac{(k+1)^2}{9}\Rightarrow k^2<279<(k+1)^2，$$

故可推知$k=16$

14.設 a, b 為實數且 $(a+bi)(2+6i)=-80$，其中 $i^2=-1$。則 $(a,b)=$______。

【102.學測　◆◇◇數與式】

【解】：

$$(a+bi)(2+6i)=-80 \Rightarrow a+bi=\frac{-80}{2+6i}=\frac{-80(2-6i)}{40}=-2(2-6i)=-4+12i$$

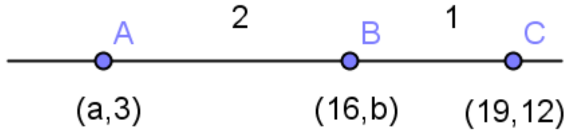
則 $(a,b)=(-4,12)$

15.坐標平面中 $A(a,3)$，$B(16,b)$，$C(19,12)$ 三點共線。已知 C 不在 A、B 之間，且 $\overline{AC}:\overline{BC}=3:1$，則 $a+b=$______。【102.學測　◆◇◇直線與圓】

【解】：

如圖，$\because \overline{AB}:\overline{BC}=2:1$，$\therefore$ 由分點公式

得 $(16,b)=\left(\dfrac{a+38}{3},\dfrac{3+24}{3}\right)$。



解得 $a=10$，$b=9$

則 $a+b=19$。

16.阿德賣 100 公斤的香蕉，第一天每公斤賣 40 元；沒賣完的部份，第二天降價為每公斤 36 元；第三天再降為每公斤 32 元，到第三天全部賣完，三天所得共為 3720 元。假設阿德在第三天所賣香蕉的公斤數為 t，可算得第二天賣出香蕉的公斤數為 $at+b$，其中 $a=$______，$b=$______。【102.學測　◆◇◇多項式函數】

【解】：

$$40[100-t-(at+b)]+36(at+b)+32t=3720$$

$$\Rightarrow (-4a-8)t+(4000-4b)=3720 \Rightarrow (4a+8)t=(280-4b)$$

$\because$ 是恆等式，$\therefore \begin{cases} 280-4b=0 \\ 4a+8=0 \end{cases}$

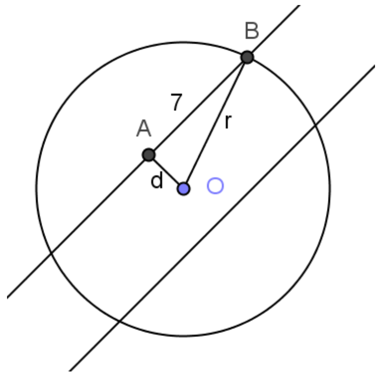
解得 $a=-2$，$b=70$

17.坐標平面上，一圓與直線$x-y=1$以及直線$x-y=5$所截的弦長皆為 14。則此圓面積為______。【102.學測　◆◇◇直線與圓】

【解】：

∵兩平行直線$x-y-1=0$與$x-y-5=0$所截的弦等長，且其距離為

$$\frac{|(-1)-(-5)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$



∴弦心距$d=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$。

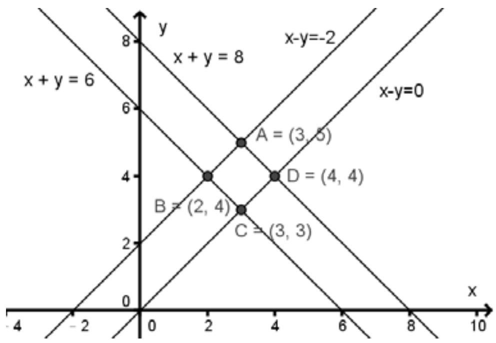
因此，圓的半徑$r=\sqrt{7^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{51}$。

故此圓的面積為51π。

18.令$\overrightarrow{A}$，$\overrightarrow{B}$為坐標平面上兩向量。已知$\overrightarrow{A}$的長度為 1，$\overrightarrow{B}$的長度為 2 且$\overrightarrow{A}$與$\overrightarrow{B}$之間的夾角為60°。令$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$，$\overrightarrow{v}=x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}$，其中$x,y$為實數且符合$6\le x+y\le 8$以及$-2\le x-y\le 0$，則內積$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$的最大值為____。【102.學測　◆◇◇直線與圓、平面向量】

【解】：

$\because \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=1\times 2\times\cos 60^\circ=1$



$\therefore \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\left(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}\right)\cdot\left(x\overrightarrow{A}+y\overrightarrow{B}\right)$

$=x\left|\overrightarrow{A}\right|^2+y\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}+x\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}+y\left|\overrightarrow{B}\right|^2$

$=x+y+x+4y=2x+5y$

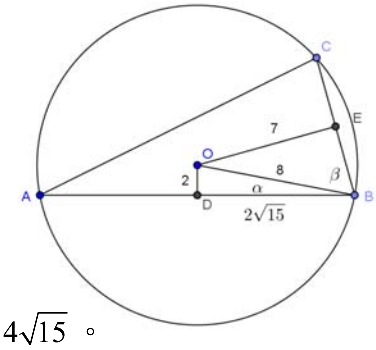
又x、y的可行解區域如圖將四頂點代入$2x+5y$，得

(x,y)	$(3,3)$	$(4,4)$	$(3,5)$	$(2,4)$
$2x+5y$	21	28	31	24

根據頂點法，當$x=3$，$y=5$時，$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}$有最大值 31

19.設銳角三角形 ABC 的外接圓半徑為 8。已知外接圓圓心到 $\overline{AB}$ 的距離為 2，而到 $\overline{BC}$ 的距離為 7，則 $\overline{AC}=$______。【102.學測　◆◇◇三角函數】

【解】:



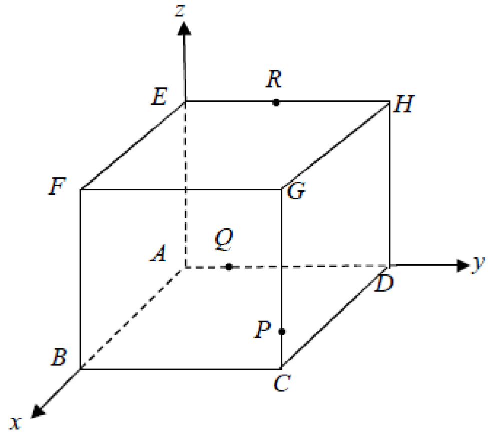
依題意，得右圖。利用和角公式，得

$$\sin B=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{2}{8}\times\frac{\sqrt{15}}{8}+\frac{2\sqrt{15}}{8}\times\frac{7}{8}=\frac{\sqrt{15}}{4}\text{。}$$

再利用正弦定理 $\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$，得 $\overline{AC}=2R\times\sin B=16\times\frac{\sqrt{15}}{4}=4\sqrt{15}$。

20.如下圖，在坐標空間中，A, B, C, D, E, F, G, H 為正立方體的八個頂點，已知其中四個點的坐標為 $A(0,0,0)$、$B(6,0,0)$、$D(0,6,0)$ 及 $E(0,0,6)$，P 在線段 $\overline{CG}$ 上且 $\overline{CP}:\overline{PG}=1:5$，$R$ 在線段 $\overline{EH}$ 上且 $\overline{ER}:\overline{RH}=1:1$，$Q$ 在線段 $\overline{AD}$ 上。若空間中通過 P，Q，R 這三點的平面，與直線 AG 不相交，則 Q 點的 y 坐標為________。(化成最簡分數)【102.學測　◆◇◇空間向量】



【解】:

依題意，得 $G(6,6,6)$、$P(6,6,1)$、$R(0,3,6)$。設 $Q(0,y,0)$，$0<y<6$，

Ω 為通過 P、Q、R 三點的平面。由 Ω 與直線 AG 不相交，得知

Ω 與直線 AG 平行，因此，Ω 的法向量 $\overrightarrow{n}$ 與直線 AG 的方向向量 $\overrightarrow{l}$ 垂直。

取 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{PR}\times\overrightarrow{PQ}=(-6,-3,5)\times(-6,y-6,-1)=(33-5y,-36,-6y+18)$

$\overrightarrow{l}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{6}(6,6,6)=(1,1,1)$，$\because\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{l}$，$\therefore\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{l}=0$

即 $(33-5y,-36,-6y+18)\cdot(1,1,1)=0\Rightarrow 15-11y=0$，解得 $y=\frac{15}{11}$。

筆記欄

筆記欄