1. 從集合$\left\{\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} a,b,c 爲0，1，2或3\right\}$中隨機抽取一個矩陣

，其行列式爲 0 的機率等於______。

Ans. $\dfrac{7}{16}$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} = ac = 0$$

$ac=0$ 的想法

(法 I) a 與 c 至少 1 個為 0

(法 II)全$-$ a 與 c 皆不為 0

2. 已知矩陣$A=\left[a_{ij}\right]_{3\times 3}$，其中$a_{ij}=\begin{cases} i^2，i \ge j \\ j^2，i<j \end{cases}$，則矩陣

$A=$______。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

3. 設矩陣$A=\left[a_{ij}\right]_{10\times 15}$，其中$a_{ij}=2j-i$，則 A 中的所有元素之總和爲

(1) 1575 (2) 2005 (3) -195 (4) 1438 (5) 0

Ans. (1)

$$\begin{aligned}
\text{元素總合} &= \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{15} a_{ij} = \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{15}(2j-i) \\
&= \sum_{i=1}^{10}\left(2\cdot\frac{15\cdot 16}{2}-15i\right) = \sum_{i=1}^{10}(240-15i) \\
&= 10\cdot 240 - 15\cdot\frac{10\cdot 11}{2} = 1575
\end{aligned}$$

求元素總和的方法

(法 I)列出矩陣

再求元素總和

(法 II)若列(行)數太多

則使用Σ

矩陣乘法

矩陣乘法定義

設三矩陣 $A=[a_{ij}]$ ， $B=[b_{ij}]$ ， $C=[c_{ij}]=m\times n$

定義 $C=AB$ ，其中 $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\cdots+a_{ip}\cdot b_{pj}$

即： $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{1j} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{mj} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$

註：矩陣 C 的 (i,j) 元為由 A 的第 i 列與 B 的第 j 行

經類似內積的計算得之

故 A 的行數必須等於 B 的列數， AB 才可乘

矩陣乘法性質

(1)結合律：$(AB)C=A(BC)$ ， $r(AB)=(rA)B=A(rB)$

(2)左分配律： $A(B+C)=AB+AC$

(3)右分配律：$(A+B)C=AC+BC$

(4)次方： $A^k=A\cdot A\cdots\cdot A$

乘法單位元素 I_n 性質

(1)若 A 為 n 階方陣，則 $AI_n=I_nA=A$

(2)若 A 為 $m\times n$ 矩陣，則 $AI_n=A=I_mA$